**UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA**

Facultad de Ingeniería

Instituto de Computación

“MDVRP”

Introducción Estado del Arte de Proyecto de Grado

Javier de Prado

Alejandro García

Francisco Güella

Tutores

Sandro Moscatelli

Omar Viera

Contenido

[Introducción 4](#_Toc410138097)

[Ventanas de tiempo 6](#_Toc410138098)

[Tipos de flota disponible 6](#_Toc410138099)

[Periodicidad 7](#_Toc410138100)

[Otras variantes en los problemas de ruteo de vehículos 8](#_Toc410138101)

[Formulación Matemática 9](#_Toc410138102)

[Bibliografía 10](#_Toc410138103)

# Introducción

Este documento trata sobre el estado del arte de MDVRP del proyecto de grado de la carrera Ingeniería en Computación de los estudiantes Francisco Güella, Alejandro García y Javier de Prado.

…La gestión logística es un elemento clave en la estrategia empresarial, siendo una de sus funciones principales la distribución, y dentro de ella la capacidad para optimizar las rutas de transporte. En este contexto, las empresas deben analizar los factores más relevantes en el diseño de sus rutas vehiculares así como las metodologías más adecuadas para tal optimización. La optimización de una ruta engloba todas las acciones que contribuyen a la mejora de la función de distribución en términos de nivel de servicio, calidad y costos a través de decisiones de carácter estratégico, táctico y operativo. [1]

El estudio de los problemas de optimización combinatoria se remonta a 1784 cuando Monge busca la forma óptima de transportar moléculas desde un terreno a otro. En su estudio, busca la forma de transportar las moléculas de forma tal que la distancia total de transporte sea la menor posible. [2]

El Problema a estudiar en este proyecto de grado, el cual está relacionado a la gestión logística y a la optimización combinatoria, es el de Ruteo de Vehículos con múltiples Depósitos (MDVRP, Multi Depot Vehicle Routing Problem). El escenario planteado presenta a un conjunto de clientes a los cuales hay que abastecerlos con mercadería. Quienes proveen la mercadería cuentan con varios depósitos y una flota de vehículos. La mercadería se traslada a través de la flota de vehículos. El problema planteado es el de optimizar la elección de las rutas que deben realizar los vehículos para satisfacer la demanda de los clientes teniendo en cuenta que los vehículos tienen una capacidad limitada para el transporte de la mercadería. Típicamente se plantea que los vehículos comiencen y terminen su ruta en el mismo depósito y además el cliente recibe una única visita de un vehículo de la flota. El mencionado es la versión básica del problema. Bodin et al en [3] formula el problema Multi Depot Vehicle Routing. Otras definiciones del problema MDVRP se pueden encontrar en [4] [5] [6].Se han propuesto distintas variantes las cuales se mostrarán más adelante.

El problema de optimizar las rutas para los vehículos se puede entender como el problema de encontrar un valor mínimo para algún criterio como puede ser distancia, tiempo, consumo de combustible, etc., relacionado a la ruta del vehículo. En general a este criterio se lo presenta como costo. En la definición del problema recién expuesta, se planteó que un vehículo brinda mercadería a un cliente. Un problema equivalente sería el de recoger mercadería de los clientes y llevarlos a los depósitos. Por ejemplo, cuando un camión levanta la leche de los tambos, o cuando reparte cerveza en los bares. Para simplificar y generalizar esta idea de que brindar o recoger mercadería son problemas equivalentes en este escenario, se presenta como que el vehículo brinda servicio a los clientes los cuales tienen una demanda. Pudiendo ser este el servicio de repartir o recoger.

El problema MDVRP es una generalización del problema VRP (Vehicle Routing Problem) [4]. El problema VRP consta de optimizar las rutas en el mismo escenario, con la diferencia que se cuenta con un único depósito. Fue formulado en 1959 por Dantzig y Ramser [7]en donde se presenta “The Truck dispatching Problem” en el cual un camión (vehículo) debe abastecer de combustible (servicio) a un conjunto de estaciones de servicio (clientes). Las estaciones tienen una demanda y los camiones capacidades de carga de combustible. De esta forma se daba comienzo al estudio de lo que luego se conocería como VRP.

A su vez, el problema VRP es una generalización del problema TSP. (Travelling Salesman Problem). Así presentaron Dantzig y Ramser  “The Truck dispatching Problem” [7], como una generalización de TSP. Travelling Salesman Problem, en castellano “Problema del Agente Viajero” es el siguiente: Dada una lista de ciudades y las distancias entre cada una de ellas, ¿cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y regresa a la ciudad origen? [2] [8]Tomando a las ciudades como clientes, y tomando a un único vehículo que no lleva ninguna carga y que solamente debe visitar a los clientes, es que se puede ver al problema VRP como una generalización del problema TSP. O sea que TSP sería un caso particular del problema VRP como a su vez VRP sería un caso particular del problema MDVRP.

El problema TSP es un problema NP-Duro, demostrado por Richard Karp en 1972 [8]. También los problemas VRP y MDVRP son NP-duros. [9] Esta es la razón por la cual el objetivo que se plantea generalmente es encontrar una buena solución y no la que minimiza el costo total (solución óptima).

La complejidad NP-Duro de estos problemas, que aumenta exponencialmente a medida que lo hace el número de clientes, dificulta el desarrollo de métodos que resuelvan el problema de manera óptima en un tiempo razonable. No obstante, y a pesar de su elevado costo computacional, existen métodos exactos aplicados a este tipo de problemas que serán mencionados posteriormente. El enfoque más habitual a la hora de resolver estos problemas es el de aplicar métodos heurísticos o meta heurísticos, capaces de generar soluciones cercanas a la óptima sin incurrir en altos tiempos de ejecución y carga computacional.

## VARIANTES EN LOS PROBLEMAS DE RUTEO

La diversidad de aplicaciones donde asuntos de ruteo pueden ser encontrados ha llevado a plantear diferentes variantes de los problemas VRP y MDVRP. Mencionaremos algunas de ellas.

# Ventanas de tiempo

L. Bodin et al, en su estado del arte sobre el ruteo de vehículo [3], presenta la restricción de ventanas de tiempo. La misma restringe en una ventana horaria el tiempo en el cuál un cliente puede ser atendido por un vehículo.

Una variante a esta restricción se puede encontrar en [10]. Donde Lei Wen et al, plantean que la misma no es estricta. Esto quiere decir que se puede dar servicio a un cliente fuera de su ventana de tiempo, pero esto aumentaría el costo de la ruta del vehículo. Distinguen las restricciones de ventana de tiempo entre hard time window y soft time windows. Ellos (Lei Wen et al) utilizan soft time Windows para el abordaje del problema. En hard time Windows el vehículo no podría dar servicio al cliente fuera de la ventana de horario bajo ningún concepto.

# Tipos de flota disponible

L. Bodin et al, en su estado del arte sobre el ruteo de vehículo [3], presenta la siguiente distinción entre los tipos de vehículos que podrían componer la flota.

Flota homogénea: todos los vehículos de la flota son idénticos.

Flota heterogénea: hay varios tipos de vehículos con distintas capacidades.

L. Bodin et al, presenta una situación en el planteo “THE FLEET SIZE AND MIX PROBLEM” en la cual la flota heterogénea de los proveedores de servicio se compone por vehículos comprados y vehículos alquilados. En este caso esta situación de flota heterogénea implica en este planteo que los costos de las rutas estén compuestas por un costo fijo (el del alquiler del vehículo) y un costo variables (el costo de transitar la ruta). En esta formulación se asumió que la cantidad de vehículos de cada tipo a disposición es ilimitada.

En [9] Kumar et al, proponen las siguientes dos opciones en la formulación del problema VRP. Dicen que la cantidad de vehículos los cuales dispone la flota, puede ser una cantidad dada a priori, o la misma podría llegar a ser una variable de decisión.

Baldacci et al, presentan en [11] una variante de VRP, en la cuál una flota de vehículos caracterizados por diferentes capacidades y costos está disponible para las actividades de distribución. En este caso clasifica a esta variable de VRP como “Mixed Fleet VRP” o “Heterogeneous Fleet VRP”. Baldacci plantea que hay cierta homogeneidad en llamar a Heterogeneous VRP como la variante que limita el número de vehículos, y Fleet Size and Mix VRP a la variable que no limita la cantidad de vehículos.

Baldacci [11] muestra una clasificación de las variantes VRP según costos fijos y variables de la flota, Fleet Size and Mix y Heterogeneous VRP

# Periodicidad

Tan y Beasley [12] definen a la variante de PVRP (period vrp) de la siguiente manera:

The Period vehicle routing problema (pvrp) es el problema de designar rutas de vehículos para todos los días de un período dado de T días donde no todos los clientes requieren servicio en todos los días del período. Típicamente si un cliente requiere k visitas (k<=T) durante el período entonces estas k visitas podrían ocurrir en una manera determinada dado un número de posibles maneras. Por ejemplo si un cliente requiere servicio dos días en un período de 5 días entonces las posibles combinaciones de días para brindar el servicio podrían ser Lunes/Miércoles, Martes/Jueves, o Miércoles/Viernes donde estas serían las únicas combinaciones de días aceptables.

Francis y Smilowitz en [13] proponen una variante al problema recién descrito. El mismo, PVRP-SC (The Period Vehicle Routing Problem with Service Choice) presenta la siguiente característica. Mientras que en PVRP, las frecuencia de visitas al cliente en un período de tiempo está predeterminada, en PVRP-SC la frecuencia es una variable de decisión. En la definición de PVRP recién presentada, las únicas opciones eran que un cliente sea visitado en una de las siguientes combinaciones: Lunes/Miércoles, Martes/Jueves, o Miércoles/Viernes. En PVRP-SC, si bien se plantea una frecuencia mínima (por ejemplo que el cliente tenga que ser visitado por lo menos un día a la semana), dicha frecuencia podría ser mayor y es una variable de decisión. La frecuencia con que se visita a un cliente en este caso influye en el costo de la ruta. O sea que impactaría en la función objetivo del problema. Los beneficios de una mayor frecuencia podrían representar los ahorros en el cliente de costos de almacenamiento, o la disposición del cliente de pagar por más visitas en la semana.

Tan y Beasley en [12] hacen notar que PVRP es una generalización del problema VRP, el cual tendría un período de un solo día.

Mingozzi y Valleta, en [14] relacionan al PVRP con el MDVRP ya mencionado. Dicen que MDVRP puede ser visto como un caso especial de PVRP donde cada día del período de planeamiento corresponde a un depósito diferente y donde cada cliente requiere ser visitado una única vez en el período tomado en cuenta.

# Otras variantes en los problemas de ruteo de vehículos

Algunas otras variantes que se pueden encontrar en los problemas de ruteo de vehículos son las siguientes:

SDVRP (Split Delivery VRP): También llamado VRP de entrega dividida, donde se permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante si el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo. (Belenguer, J. et al. (2000)) (Hertz, A. et al. (2006)) (Chen, S. et al. (2007)) (Jin, M. et al. (2007)).

SVRP (Stochastic VRP): Se trata de un VRP en que uno o varios componentes son aleatorios; clientes, demandas y tiempos estocásticos son las principales inclusiones en este tipo de problemas. (Dror, M. et al. (1986))(Bertsimas, D. et al. (1991)) (Gendreau, M. et al. (1996)) (Laporte, G. et al. (2002)).

VRPPD (VRP Pickup and Delivery): También llamado VRP con entrega y recogida, es aquel en el que cabe la posibilidad de que los clientes pueden devolver determinados bienes, por tanto, se debe tener presente que estos quepan en el vehículo. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación y puede causar una mala utilización de las capacidades de los vehículos, un aumento de las distancias recorridas o a un mayor número de vehículos. (Dethloff, Jan (2001)) (Montané, A. et al. (2006)) (Bianchessi, N. et al. (2007)) (Kachitvichyanukul, V. et al. (2009)).

VRPB (VRP with Backhauls): Se trata del mismo VRPPD, pero incluye la restricción de culminar todas las entregas antes de iniciar las diversas recogidas. Este concepto, parte del hecho de que los vehículos inicialmente están cargados en su totalidad, luego re-asignar cargas a los camiones en los almacenes puede llegar a ser imposible, desde la perspectiva económica o física. (Toth y Vigo (1997)) (Mingozzi, A. et al. (1999)) (Osman, I. et al. (2002)) (Brandão, José (2006)).

## Formulación Matemática

Generalmente a estos problemas se los modela a través de grafos ponderados.

Sea un grafo . El conjunto de nodos representa los sitios que participan en el problema, es decir, clientes y depósitos, donde es la cantidad total de clientes y depósitos.

[3] [15]

La existencia de un arco indica que es posible transportarse desde el sitio representado por al sitio representado por. Es usual que a cada arco se le asocie un costo que indica la manera más económica de transportarse de a . C es la matriz que representa los costos de los arcos.

Cuando se trata de un único depósito, generalmente el mismo se representa con el nodo . Cuando se trata de varios depósitos, se suele dividir el conjunto en dos subconjuntos y donde ={,,…} es el conjunto de los clientes y ={,…., el conjunto de los depósitos [10] [4]. Wen y Meng en [10] utilizan un grafo dirigido en donde representa el costo de transportarse de a . Sin embargo, Wang utiliza un grafo sin dirigir ya que representa la distancia entre el nodo y el nodo . L. Bodin et al utiliza un grafo no dirigido ya que para él representa también la distancia de ir de a y por lo tanto sería igual .

Una ruta es un ciclo simple en que representa la secuencia de visitas realizadas por el vehículo que recorre la ruta. La ruta comienza y finaliza en el mismo depósito en caso del problema VRP y MDVRP, o ciudad origen en el caso de TSP. El costo de una ruta se obtiene sumando los costos de los arcos que forman el ciclo.

En la mayor parte de los casos será un grafo completo, pues en una red de transporte real dados dos sitios cualesquiera existe una manera de transportarse de uno al otro.

Como se muestra a continuación, cada problema particular tendrá sus propias características y restricciones de modelado. Se mostrarán algunos ejemplos de modelado y formulación matemática.

### Formulación Matemática de TSP

La siguiente formulación del TSP como problema de programación entera binaria fue propuesta por Dantzig, Fulkerson y Johnson [3] en 1954:

s.a.

(1.1)

(1.2)

(1.3)

(1.4)

(1.5)

|  |
| --- |
|  |

Figura 1.3: Una solución para la instancia de la Figura 1.1(a) formada por 3 sub-tours.

Las variables binarias indican si el arco pertenece a la ruta ( o no . La función objetivo (1.1) establece que el costo total de la solución es la suma de los costos de los arcos utilizados. La restricción (1.2) restringe los valores que puede tomar y las restricciones (1.3) y (1.4) indican que la ruta debe llegar y abandonar cada nodo exactamente una vez. Finalmente en la restricción (1.5) se utiliza el conjunto para prohibir soluciones sub-tour que cumplan las restricciones de asignación (1.2), (1.3) y (1.4). Esta restricción es llamada restricción de eliminación de sub-tours e impone que todo subconjunto de nodos debe ser abandonado al menos una vez. Si no se impusiera esta restricción se estaría admitiendo soluciones que constan de más de un ciclo, como la que se muestra en la Figura 1.3. Esta solución está formada por tres sub-tours y viola la restricción (1.5) para los conjuntos .

Se han propuesto varias alternativas para el conjunto . Algunas de estas alternativas son:

### Formulación Matemática de VRP

El problema de ruteo de vehículos (VRP) como ya se mencionó, se consideró por primera vez por Dantzig y Ramser [4], que desarrollaron un enfoque heurístico utilizando las ideas de programación lineal. En este enfoque los vehículos solo tienen restricciones de capacidad y costo máximo de la ruta que recorren.

s.a.

A continuación la formulación de este problema [5] [6]

(1.6)

(1.7)

(1.8)

(1.9)

(1.10)

(1.11)

(1.12)

(1.13)

(1.14)

(1.15)

Donde

= Número de vehículos

= Capacidad del vehículo

= Costo máximo permitido para la ruta de vehículo

= Demanda del nodo ,

= 1, si el par pertenece a la ruta del vehículo , 0 en otro caso.

En la formulación anterior, las restricciones (1.7) y (1.8) aseguran que cada cliente es atendido por uno y sólo un vehículo. La continuidad de la ruta está representada por (1.9). La restricción (1.10) representa las limitaciones de capacidad del vehículo y (1.11) representa las limitaciones de costo de cada ruta. Las restricciones (1.12) y (1.13) aseguran que la disponibilidad de vehículos no sea superada. Finalmente la restricción (1.15) se utiliza para prohibir soluciones sub-tour. Esta última restricción también se puede es escribir como una desigualdad:

Se asume que y ,

La demanda en cada nodo es menor o a lo sumo igual a la capacidad de cada vehículo.

### Formulación Matemática de MDVRP

La formulación del problema de MDVRP se presenta a partir de la formulación vista anteriormente de VRP. Siendo (N + 1 .... N + M) los M depósitos. Dicha formulación se encuentra en [16], donde además se presentan distintas formulaciones para el mismo problema.

s.a.

(1.16)

(1.17)

(1.18)

(1.19)

(1.20)

(1.21)

(1.22)

(1.23)

(1.24)

(1.25)

Donde

Donde

= Número de vehículos

= Capacidad del vehículo

= Costo máximo permitido para la ruta de vehículo

= Demanda del nodo ,

= 1, si el par pertenece a la ruta del vehículo , 0 en otro caso.

En la formulación anterior, las restricciones (1.17) y (1.18) aseguran que cada cliente es atendido por uno y sólo un vehículo. La continuidad de la ruta está representada por (1.19). La restricción (1.20) representa las limitaciones de capacidad del vehículo y (1.21) representa las limitaciones de costo de cada ruta. Las restricciones (1.22) y (1.23) aseguran que la disponibilidad de vehículos no sea superada. Finalmente la restricción (1.25) se utiliza para prohibir soluciones sub-tour.

## Variantes específicas del problema de ruteo de vehículos con multi depósitos

ENTRAR DE LLENO EN MDVRP QUE ES LO CENTRAL DEL PROYECTO

PEQUEÑA INTRODUCCIÓN CON DIBUJOS(BIEN CHOTA)

VARIANTES ESPECÍFICAS DE MULTI DEPOT. (REFERENCIAR LAS VARIANTES ANTERIORES)

MÉTODOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VEHÍCULOS

VER DE COMPARA EXACTOS HEURISTICAS META- O SI ENETRAR DE LLENO EN MDVRP

# Bibliografía

|  |  |
| --- | --- |
| [1] | I. Gallegos Mateos, A. Gómez Gómez y D. Arguelles Martino, «A hybrid method for the resolution of the MDVRP,» pp. 45-64, 2013. |
| [2] | A. Schrijver, «On the History of Combinatorial Optimization,» 1960. |
| [3] | L. Bodin, «Routing and scheduling of vehicles and crew: the state of the art». |
| [4] | Y. Wang, «Research or multi-depot vehicle routing problem by cellular ant algorithm». |
| [5] | Surekha y S. Sumathi, «Solution to Multi-Depot Vehicle Routing Problem Using Genetic Algorithms». |
| [6] | J. Carlsson, Dongdong y Arjun Subramaniam, «Solvin Min-Max Multi-Depot Vehicle Routing Problem». |
| [7] | G. B. Dantzig y J. H. Ramser, «The Truck Dispatching Problem,» pp. 80-91, 1959. |
| [8] | R. M. Karp, «Reducibility Among Combinatorial Problemas,» 1971. |
| [9] | S. N. Kumar y R. Panneerselvam, «A Survey on the Vehicle Routing Problem and Its Variants». |
| [10] | L. Wen y F. Meng, «An Improved PSO for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows». |
| [11] | R. Baldacci, M. Battarra y D. Vigo, «Routing a Heterogeneous Fleet of Vehicles». |
| [12] | C. Tan y J. Beasley, «A Heuristic Algorithm for the Period Vehicle Routing Problem». |
| [13] | Francis y Smilowitz, «The Period vehicle routing problem with service choice». |
| [14] | A. Mingozzi y A. Valleta, «An exact algorithm for period an multi-depot vehicle routing problems». |
| [15] | A. Olivera, «Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos». |
| [16] | P. Toth y D. Vigo, The Vehicule Routing Problem. |
| [17] | A. Olivera, «Memorias adaptativas para el problema,» 2005. |
| [18] | G. Dantzig, D. Fulkerson y S. Johnson, «Solution of a large scale traveling salesman,» 1954, pp. Vol. 2, 393-410. |
| [19] | B. Golden, «Vehicle routing problems: Formulations and heuristic solution techniques,» Technical report No. I13, MIT Operations Research Centre, 1975. |
| [20] | B. Golden, T. Magnati y H. Nguyen, «Implementing vehicle routing alogorithms,» 1977, pp. 113-148. |
| [21] | G. González Vargas y F. González Aristizabal, «Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: formulación del problema,» *Revista Ingeniería e Investigación,* vol. 26, nº 3, pp. 149-156, 2006. |
| [22] | T. Vidal, T. G. Crainic, M. Gendreau y C. Prins, «Heuristics for multi-attribute vehicle routing problems: A survey and synthesis,» 2012. |
| [23] | K. Jansen, «Bounds for the general capacitated routing problem.,» vol. 23, pp. 165-173, 1993. |
| [24] | C. Prins, «A simple and e$ective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem,» *Computers & Operations Research 31,* pp. 1985-2002, 2004. |
| [25] | J. Renaudl, G. Laporte y F. F. Boctor, «A tabu search heuristics for the multi-depot vehicle routing problem,» *Computers& Operations Research,* vol. 23, nº 3, pp. 229-235, 1996. |
| [26] | P. Toth y A. Tramontani, «An Integer Linear Programming Local Search for Capacitated Vehicle Routing Problems,» *The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges,* vol. 2, pp. 275-295, 2008. |
| [27] | T.-H. Wu, C. Low y J.-W. Bai, «Heuristic solutions to multi-depot location-routing problems,» *Computers & Operations Research 29,* pp. 1393-1415, 2002. |
| [28] | B. Crevier, J.-F. Cordeau y G. Laporte, «The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes,» *European Journal of Operational Research 176,* pp. 756-773, 2007. |
| [29] | W. Ho, G. T. Ho, P. Ji y H. C. Lau, «A hybrid genetic algorithm for the multi-depot vehicle routing problem,» *Engineering Applications of Artificial Intelligence 21,* pp. 548-557, 2008. |
| [30] | R. K. a. P. BHAVE, «Integer programming formulations of vehicle,» *Eurorean Journal of Operational Research ,* vol. 20, pp. 58-67, 1985. |