**UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA**

Facultad de Ingeniería

Instituto de Computación

“MDVRP”

Introducción Estado del Arte de Proyecto de Grado

Javier de Prado

Alejandro García

Francisco Güella

Tutores

Sandro Moscatelli

Omar Viera

Contenido

[Introducción 4](#_Toc411199097)

[Variantes en los problemas de ruteo de vehículos 6](#_Toc411199098)

[Ventanas de tiempo 6](#_Toc411199099)

[Tipos de flota disponible 6](#_Toc411199100)

[Periodicidad 7](#_Toc411199101)

[Otras variantes en los problemas de ruteo de vehículos 8](#_Toc411199102)

[Formulación Matemática 10](#_Toc411199103)

[Formulación Matemática de TSP 12](#_Toc411199104)

[Formulación Matemática de VRP 13](#_Toc411199105)

[Formulación Matemática de MDVRP 15](#_Toc411199106)

[Variantes de Multi-Depot Vehicle Routing Problem (MDVRP) 16](#_Toc411199107)

[Variantes específicas del problema de ruteo de vehículos con multi depósitos y funciones multiobjetivos. 17](#_Toc411199108)

[Alcance del documento. 18](#_Toc411199109)

[Métodos para la resolución de problemas de ruteo de vehículos 19](#_Toc411199110)

[Métodos Exactos 19](#_Toc411199111)

[Métodos Heurísticos 21](#_Toc411199112)

[Soluciones de software existentes para MDVRP 25](#_Toc411199113)

[Bibliografía 26](#_Toc411199114)

# Introducción

Este documento trata sobre el estado del arte de MDVRP del proyecto de grado de la carrera Ingeniería en Computación de los estudiantes Francisco Güella, Alejandro García y Javier de Prado.

…La gestión logística es un elemento clave en la estrategia empresarial, siendo una de sus funciones principales la distribución, y dentro de ella la capacidad para optimizar las rutas de transporte. En este contexto, las empresas deben analizar los factores más relevantes en el diseño de sus rutas vehiculares así como las metodologías más adecuadas para tal optimización. La optimización de una ruta engloba todas las acciones que contribuyen a la mejora de la función de distribución en términos de nivel de servicio, calidad y costos a través de decisiones de carácter estratégico, táctico y operativo. [1]

El estudio de los problemas de optimización combinatoria se remonta a 1784 cuando Monge busca la forma óptima de transportar moléculas desde un terreno a otro. En su estudio, busca la forma de transportar las moléculas de forma tal que la distancia total de transporte sea la menor posible. [2] (se podría poner algo más para hablar de las “variables de decisión”)

El Problema a estudiar en este proyecto de grado, el cual está relacionado a la gestión logística y a la optimización combinatoria, es el de Ruteo de Vehículos con múltiples Depósitos (MDVRP, Multi Depot Vehicle Routing Problem). El escenario planteado presenta a un conjunto de clientes a los cuales hay que abastecerlos con mercadería. Quienes proveen la mercadería cuentan con varios depósitos y una flota de vehículos. La mercadería se traslada a través de la flota de vehículos. El problema planteado es el de optimizar la elección de las rutas que deben realizar los vehículos para satisfacer la demanda de los clientes teniendo en cuenta que los vehículos tienen una capacidad limitada para el transporte de la mercadería. Típicamente se plantea que los vehículos comiencen y terminen su ruta en el mismo depósito y además el cliente recibe una única visita de un vehículo de la flota. El mencionado es la versión básica del problema. Bodin et al en [3] formula el problema Multi Depot Vehicle Routing. Otras definiciones del problema MDVRP se pueden encontrar en [4] [5] [6]. Se han propuesto distintas variantes las cuales se mostrarán más adelante.

El problema de optimizar las rutas para los vehículos se puede entender como el problema de encontrar un valor mínimo para algún criterio como puede ser distancia, tiempo, consumo de combustible, etc., relacionado a la ruta del vehículo. En general a este criterio se lo presenta como costo. En la definición del problema recién expuesta, se planteó que un vehículo brinda mercadería a un cliente. Un problema equivalente sería el de recoger mercadería de los clientes y llevarlos a los depósitos. Por ejemplo, cuando un camión levanta la leche de los tambos, o cuando reparte cerveza en los bares. Para simplificar y generalizar esta idea de que brindar o recoger mercadería son problemas equivalentes en este escenario, se presenta como que el vehículo brinda servicio a los clientes los cuales tienen una demanda. Pudiendo ser este el servicio de repartir o recoger.

El problema MDVRP es una generalización del problema VRP (Vehicle Routing Problem) [4]. El problema VRP consta de optimizar las rutas en el mismo escenario, con la diferencia que se cuenta con un único depósito. Fue formulado en 1959 por Dantzig y Ramser [7] en donde se presenta “The Truck dispatching Problem” en el cual un camión (vehículo) debe abastecer de combustible (servicio) a un conjunto de estaciones de servicio (clientes). Las estaciones tienen una demanda y los camiones capacidades de carga de combustible. De esta forma se daba comienzo al estudio de lo que luego se conocería como VRP [8].

A su vez, el problema VRP es una generalización del problema TSP. (Travelling Salesman Problem). Así presentaron Dantzig y Ramser  “The Truck dispatching Problem” [7], como una generalización de TSP. Travelling Salesman Problem, en castellano “Problema del Agente Viajero” es el siguiente: Dada una lista de ciudades y las distancias entre cada una de ellas, ¿cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y regresa a la ciudad origen? [2] [9]. Tomando a las ciudades como clientes, y tomando a un único vehículo que no lleva ninguna carga y que solamente debe visitar a los clientes, es que se puede ver al problema VRP como una generalización del problema TSP. O sea que TSP sería un caso particular del problema VRP como a su vez VRP sería un caso particular del problema MDVRP.

El problema TSP es un problema NP-Duro, demostrado por Richard Karp en 1972 [10]. También los problemas VRP y MDVRP son NP-duros [11]. Esta es la razón por la cual el objetivo que se plantea generalmente es encontrar una buena solución y no la que minimiza el costo total (solución óptima).

La complejidad NP-Duro de estos problemas, que aumenta exponencialmente a medida que lo hace el número de clientes, dificulta el desarrollo de métodos que resuelvan el problema de manera óptima en un tiempo razonable. No obstante, y a pesar de su elevado costo computacional, existen métodos exactos aplicados a este tipo de problemas que serán mencionados posteriormente. El enfoque más habitual a la hora de resolver estos problemas es el de aplicar métodos heurísticos o meta heurísticos, capaces de generar soluciones cercanas a la óptima sin incurrir en altos tiempos de ejecución y carga computacional.

## Variantes en los problemas de ruteo de vehículos

La diversidad de aplicaciones donde asuntos de ruteo pueden ser encontrados ha llevado a plantear diferentes variantes de los problemas VRP y MDVRP. Mencionaremos algunas de ellas.

### Ventanas de tiempo

L. Bodin et al, en su estado del arte sobre el ruteo de vehículo [3], presenta la restricción de ventanas de tiempo. La misma restringe en una ventana horaria el tiempo en el cuál un cliente puede ser atendido por un vehículo.

Una variante a esta restricción se puede encontrar en [12]. Donde Lei Wen et al, plantean que la misma no es estricta. Esto quiere decir que se puede dar servicio a un cliente fuera de su ventana de tiempo, pero esto aumentaría el costo de la ruta del vehículo. Distinguen las restricciones de ventana de tiempo entre hard time window y soft time windows. Ellos (Lei Wen et al) utilizan soft time Windows para el abordaje del problema. En hard time Windows el vehículo no podría dar servicio al cliente fuera de la ventana de horario bajo ningún concepto.

### Tipos de flota disponible

L. Bodin et al, en su estado del arte sobre el ruteo de vehículo [3], presenta la siguiente distinción entre los tipos de vehículos que podrían componer la flota.

Flota homogénea: todos los vehículos de la flota son idénticos.

Flota heterogénea: hay varios tipos de vehículos con distintas capacidades.

L. Bodin et al, presenta una situación en el planteo “The Fleet Size and Mix Problem” en la cual la flota heterogénea de los proveedores de servicio se compone por vehículos comprados y vehículos alquilados. En este caso esta situación de flota heterogénea implica en este planteo que los costos de las rutas estén compuestas por un costo fijo (el del alquiler del vehículo) y un costo variables (el costo de transitar la ruta). En esta formulación se asumió que la cantidad de vehículos de cada tipo a disposición es ilimitada.

En [11] Kumar et al, proponen las siguientes dos opciones en la formulación del problema VRP. Dicen que la cantidad de vehículos los cuales dispone la flota, puede ser una cantidad dada a priori, o la misma podría llegar a ser una variable de decisión. (suponiendo que cada vehículo realiza únicamente una ruta en la solución del problema)

Baldacci et al, presentan en [13] una variante de VRP, en la cuál una flota de vehículos caracterizados por diferentes capacidades y costos está disponible para las actividades de distribución. En este caso clasifica a esta variable de VRP como “Mixed Fleet VRP” o “Heterogeneous Fleet VRP”. Baldacci plantea que hay cierta homogeneidad en llamar a Heterogeneous VRP como la variante que limita el número de vehículos, y Fleet Size and Mix VRP a la variable que no limita la cantidad de vehículos.

Baldacci [13] muestra una clasificación de las variantes VRP según costos fijos y variables de la flota, Fleet Size and Mix y Heterogeneous VRP

### Periodicidad

Tan y Beasley [14] definen a la variante de PVRP (Period VRP) de la siguiente manera:

The Period Vehicle Routing Problema (PVRP) es el problema de designar rutas de vehículos para todos los días de un período dado de días donde no todos los clientes requieren servicio en todos los días del período. Típicamente si un cliente requiere visitas () durante el período entonces estas visitas podrían ocurrir en una manera determinada dado un número de posibles maneras. Por ejemplo si un cliente requiere servicio dos días en un período de 5 días entonces las posibles combinaciones de días para brindar el servicio podrían ser Lunes/Miércoles, Martes/Jueves, o Miércoles/Viernes donde estas serían las únicas combinaciones de días aceptables.

Francis y Smilowitz en [15] proponen una variante al problema recién descrito. El mismo, PVRP-SC (The Period Vehicle Routing Problem with Service Choice) presenta la siguiente característica. Mientras que en PVRP, las frecuencia de visitas al cliente en un período de tiempo está predeterminada, en PVRP-SC la frecuencia es una variable de decisión. En la definición de PVRP recién presentada, las únicas opciones eran que un cliente sea visitado en una de las siguientes combinaciones: Lunes/Miércoles, Martes/Jueves, o Miércoles/Viernes. En PVRP-SC, si bien se plantea una frecuencia mínima (por ejemplo que el cliente tenga que ser visitado por lo menos un día a la semana), dicha frecuencia podría ser mayor y es una variable de decisión. La frecuencia con que se visita a un cliente en este caso influye en el costo de la ruta. O sea que impactaría en la función objetivo del problema. Los beneficios de una mayor frecuencia podrían representar los ahorros en el cliente de costos de almacenamiento, o la disposición del cliente de pagar por más visitas en la semana.

Tan y Beasley en [14] hacen notar que PVRP es una generalización del problema VRP, el cual tendría un período de un solo día.

Mingozzi y Valleta, en [16] relacionan al PVRP con el MDVRP ya mencionado. Dicen que MDVRP puede ser visto como un caso especial de PVRP donde cada día del período de planeamiento corresponde a un depósito diferente y donde cada cliente requiere ser visitado una única vez en el período tomado en cuenta.

### Otras variantes en los problemas de ruteo de vehículos

Algunas otras variantes que se pueden encontrar en los problemas de ruteo de vehículos son las siguientes:

SDVRP (Split Delivery VRP)

También llamado VRP de entrega dividida, donde se permite que un cliente pueda ser atendido por varios vehículos si el costo total se reduce, lo cual es importante si el tamaño de los pedidos excede la capacidad de un vehículo. (Belenguer, J. et al. (2000)) (Hertz, A. et al. (2006)) (Chen, S. et al. (2007)) (Jin, M. et al. (2007)).

SVRP (Stochastic VRP)

Se trata de un VRP en que uno o varios componentes son aleatorios; clientes, demandas y tiempos estocásticos son las principales inclusiones en este tipo de problemas. (Dror, M. et al. (1986))(Bertsimas, D. et al. (1991)) (Gendreau, M. et al. (1996)) (Laporte, G. et al. (2002)).

VRPPD (VRP Pickup and Delivery)

También llamado VRP con entrega y recogida, es aquel en el que cabe la posibilidad de que los clientes pueden devolver determinados bienes, por tanto, se debe tener presente que estos quepan en el vehículo. Esta restricción hace más difícil el problema de planificación y puede causar una mala utilización de las capacidades de los vehículos, un aumento de las distancias recorridas o a un mayor número de vehículos. (Dethloff, Jan (2001)) (Montané, A. et al. (2006)) (Bianchessi, N. et al. (2007)) (Kachitvichyanukul, V. et al. (2009)).

VRPB (VRP with Backhauls)

Se trata del mismo VRPPD, pero incluye la restricción de culminar todas las entregas antes de iniciar las diversas recogidas. Este concepto, parte del hecho de que los vehículos inicialmente están cargados en su totalidad, luego re-asignar cargas a los camiones en los almacenes puede llegar a ser imposible, desde la perspectiva económica o física. (Toth y Vigo (1997)) (Mingozzi, A. et al. (1999)) (Osman, I. et al. (2002)) (Brandão, José (2006)).

Variantes en la Ruta

En algunos planteos de problemas de ruteo se consideran restricciones con respecto a las rutas que deberán transitar los vehículos. Por ejemplo, en la formulación de “The Truck Dispatching Problem” de B.Golden, la cual busca minimizar la distancia recorrida de los camiones, se plantea que el tiempo que le lleva a un camión transitar su ruta no debería superar un máximo dado. [8] La misma podría representar la restricción de que un chofer de camión por las leyes de tránsito no podría manejar más de tantas horas diarias.

O, como se indica en [17] donde se restringe que una ruta no puede superar un costo máximo especificado.

Variantes en la función objetivo (funciones Multi-Objetivo)

Al estudiar los problemas de ruteo de vehículos, se encuentran variantes en cuanto a la función objetivo que se plantea. Hasta ahora se mencionó que el problema es minimizar el costo total de las rutas que realizan los vehículos. Pudiendo representar dicho costo, la distancia o el tiempo que implican recorrer la ruta. Pero también se encuentran algunas variantes al respecto. Por ejemplo, García-Najera, en [18] se propone un problema de ruteo de vehículos en donde se proponen minimizar el costo total de las rutas y a su vez minimizar la cantidad de rutas (o vehículos) simultáneamente. Lo presenta como un problema Bi-objetivo.

Otro ejemplo es el estudio realizado por Robert Bowerman en [19] donde presenta una formulación matemática multi-objetivo del problema de ruteo del bus escolar urbano. En el mismo se contempla, además del criterio de eficiencia, que para Bowerman la solución más eficiente es la que utiliza menos vehículos, el criterio de equidad de las rutas para los estudiantes. En el mismo dice que las rutas deben ser equilibradas. Una forma de proveer equidad en las rutas podría ser haciendo un “balance de carga” de los buses, que implica que la cantidad de estudiantes que lleva cada ruta debería ser equivalente. A su vez plantea un “balance de largo” el cual implica que no deberían existir rutas muy distintas en el largo de su recorrido. También se toma en cuenta la distancia que un alumno camina por día desde su casa a la parada del bus. Bowerman plantea 5 funciones matemáticas en la formulación del problema del bus.

*=Distancia total de las rutas de los buses.*

*=Distancia que deben caminar los estudiantes.*

*=Balanceo de carga.*

*=Balanceo del largo.*

Con estas definiciones de funciones, el objetivo es minimizar la función () sujeto a un conjunto de restricciones (por ejemplo que un estudiante no puede caminar más de distancia, o que el largo de una ruta no puede superar ). Teniendo en cuenta que el balance de carga y largo es menor cuanto más parecidas sean las cargas y los largos de las rutas.

## Formulación Matemática

Generalmente a estos problemas se los modela a través de grafos ponderados.

Sea un grafo . El conjunto de nodos representa los sitios que participan en el problema, es decir, clientes y depósitos, donde es la cantidad total de clientes y depósitos. [3] [20]

La existencia de un arco indica que es posible transportarse desde el sitio representado por al sitio representado por. Es usual que a cada arco se le asocie un costo que indica la manera más económica de transportarse de a . es la matriz que representa los costos de los arcos.

Cuando se trata de un único depósito, generalmente el mismo se representa con el nodo . Cuando se trata de varios depósitos, se suele dividir el conjunto en dos subconjuntos y donde ={,,…} es el conjunto de los clientes y ={,…., el conjunto de los depósitos [12] [4]. Wen y Meng en [12] utilizan un grafo dirigido en donde representa el costo de transportarse de a . Sin embargo, Wang utiliza un grafo sin dirigir ya que representa la distancia entre el nodo y el nodo . L. Bodin et al utiliza un grafo no dirigido ya que para él representa también la distancia de ir de a y por lo tanto sería igual .

Una ruta es un ciclo simple en que representa la secuencia de visitas realizadas por el vehículo que recorre la ruta. La ruta comienza y finaliza en el mismo depósito en caso del problema VRP y MDVRP, o ciudad origen en el caso de TSP. El costo de una ruta se obtiene sumando los costos de los arcos que forman el ciclo.

En la mayor parte de los casos será un grafo completo, pues en una red de transporte real dados dos sitios cualesquiera existe una manera de transportarse de uno al otro.

Como se muestra a continuación, cada problema particular tendrá sus propias características y restricciones de modelado. Se mostrarán algunos ejemplos de modelado y formulación matemática.

### Formulación Matemática de TSP

La siguiente formulación del TSP como problema de programación entera binaria fue propuesta por Dantzig, Fulkerson y Johnson [9] en 1954:

s.a.

(1.1)

(1.2)

(1.3)

(1.4)

(1.5)

|  |
| --- |
|  |

Figura 1.2: Una solución para la instancia de la Figura 1.1(a) formada por 3 sub-tours.

Las variables binarias indican si el arco pertenece a la ruta ( o no . La función objetivo (1.1) establece que el costo total de la solución es la suma de los costos de los arcos utilizados. La restricción (1.2) restringe los valores que puede tomar y las restricciones (1.3) y (1.4) indican que la ruta debe llegar y abandonar cada nodo exactamente una vez. Finalmente en la restricción (1.5) se utiliza el conjunto para prohibir soluciones sub-tour que cumplan las restricciones de asignación (1.2), (1.3) y (1.4). Esta restricción es llamada restricción de eliminación de sub-tours e impone que todo subconjunto de nodos debe ser abandonado al menos una vez. Si no se impusiera esta restricción se estaría admitiendo soluciones que constan de más de un ciclo, como la que se muestra en la Figura 1.2. Esta solución está formada por tres sub-tours y viola la restricción (1.5) para los conjuntos .

Se han propuesto varias alternativas para el conjunto . Algunas de estas alternativas son:

### Formulación Matemática de VRP

El problema de ruteo de vehículos (VRP) como ya se mencionó, se consideró por primera vez por Dantzig y Ramser [7], que desarrollaron un enfoque heurístico utilizando las ideas de programación lineal. En este enfoque los vehículos solo tienen restricciones de capacidad y costo máximo de la ruta que recorren.

s.a.

A continuación la formulación de este problema [8] [17]

(1.6)

(1.7)

(1.8)

(1.9)

(1.10)

(1.11)

(1.12)

(1.13)

(1.14)

(1.15)

Donde

= Número de vehículos

= Capacidad del vehículo

= Costo máximo permitido para la ruta de vehículo

= Demanda del nodo ,

= 1, si el par pertenece a la ruta del vehículo , 0 en otro caso.

En la formulación anterior, las restricciones (1.7) y (1.8) aseguran que cada cliente es atendido por uno y sólo un vehículo. La continuidad de la ruta está representada por (1.9). La restricción (1.10) representa las limitaciones de capacidad del vehículo y (1.11) representa las limitaciones de costo de cada ruta. Las restricciones (1.12) y (1.13) aseguran que la disponibilidad de vehículos no sea superada. Finalmente la restricción (1.15) se utiliza para prohibir soluciones sub-tour. Esta última restricción también se puede es escribir como una desigualdad:

Se asume que y ,

La demanda en cada nodo es menor o a lo sumo igual a la capacidad de cada vehículo.

### Formulación Matemática de MDVRP

La formulación del problema de MDVRP se presenta a partir de la formulación vista anteriormente de VRP. Siendo los depósitos. Dicha formulación se encuentra en [17], donde además se presentan distintas formulaciones para el mismo problema.

s.a.

(1.16)

(1.17)

(1.18)

(1.19)

(1.20)

(1.21)

(1.22)

(1.23)

(1.24)

(1.25)

Donde

= Número de vehículos

= Capacidad del vehículo

= Costo máximo permitido para la ruta de vehículo

= Demanda del nodo ,

= 1, si el par pertenece a la ruta del vehículo , 0 en otro caso.

En la formulación anterior, las restricciones (1.17) y (1.18) aseguran que cada cliente es atendido por uno y sólo un vehículo. La continuidad de la ruta está representada por (1.19). La restricción (1.20) representa las limitaciones de capacidad del vehículo y (1.21) representa las limitaciones de costo de cada ruta. Las restricciones (1.22) y (1.23) aseguran que la disponibilidad de vehículos no sea superada. Finalmente la restricción (1.25) se utiliza para prohibir soluciones sub-tour.

## Variantes de Multi-Depot Vehicle Routing Problem (MDVRP)

Dado que el objetivo de este proyecto de grado es el estudio del problema MDVRP, es que de ahora en más se estudiara más en detalle este problema y sus variantes. Se presenta a continuación una gráfica *figura 1.3* del artículo de Montoya [21] en donde muestra el aumento en la cantidad de publicaciones de MDVRP y sus variantes desde la publicación inicial de Kulkarni and Bhave 1985 [17].



Figura 1.3: Distribución de publicaciones por año de MDVRP

Las variantes de problemas de ruteo de vehículos vistas anteriormente como ventana de tiempo, tipo de flota, periodicidad y recogida y entrega (pick up and deliver) son las que contienen mayor número de publicaciones sobre MDVRP, en cambio otras variantes como variaciones en las rutas o Stocastic MDVRP fueron menos estudiadas. Igual así existen numerosas publicaciones de estos tipos de problemas.

## Variantes específicas del problema de ruteo de vehículos con multi depósitos y funciones multiobjetivos.

Notar que al contar con más de un depósito se pueden generar variantes en la que los vehículos tengan que pasar por depósitos particulares en su recorrido o finalizar el recorrido en un depósito distinto al inicial. A esta variante de MDVRP se la conoce como MDVRPI (Multi-Deport Vehicle Routing Problem with Inter-Depot Routes). Existen soluciones para MDVRPI como por ejemplo en <http://www.inf.u-szeged.hu/~cimreh/inter.pdf>.

A su vez, el problema de varios depósitos y los recorridos particulares entre los depósitos genera una nueva gama de problemas donde la búsqueda de soluciones está directamente relacionada con MDVRP, como por ejemplo el Track and Trailer Vehicule Routing Problem (TTVRPTW). En este caso se quiere optimizar para el caso de las exportaciones e importaciones, el plan de rutas para camiones y trailer dado un conjunto de clientes, siendo necesario visitar un depósito, puerto y el cliente. En el caso de las exportaciones se inicia el recorrido desde el depósito pasando por el cliente a cagar la mercadería y luego al puerto. Para el caso de las importaciones, se parte del puerto, se descarga el contenedor en el cliente y se lleva el contenedor vacío al depósito. Estos problemas tienen dos particularidades implícitas, una es el manejo de ventanas de tiempo para los clientes y otra es que el objetivo final requiere encontrar la mejor ruta, así como la cantidad mínimas de camiones y los distintos tipos de camiones necesarios. ( REF A hybrid multiobjective evolutionary algorithm)

Otro aspecto a considerar en las publicaciones de MDVRP son las relacionadas a los objetivos finales de la solución. Como se vio anteriormente en las variantes de los problemas de ruteo, el objetivo final puede ser una variable o una función multi-objetivo. En la revisión de MDVRP de 2015 [21] se analizan a grandes rasgos las soluciones multi-objetivo de este problema, en donde se presentan múltiples variables de decisión para la solución final. A estos modelos se lo conoce como MOM-MDVRP; muchas veces estos objetivos pueden ser contradictorios como por ejemplo minimizar el número de vehículos y maximizar el nivel de servicios. Existen numerosas publicaciones sobre MOM-MDVRP aunque su número es mucho menor a las publicaciones de Single Objetive MDVRP.

Según el análisis de 147 publicaciones de MDVRP publicado en [21], aproximadamente 12% Corresponden a MOM-MDVRP y entre dichas publicaciones las funciones objetivos varían entre demanda, balanceo de carga de vehículos, número de vehículos, costo/distancia y otras. Centrándose en la mayoría de las publicaciones únicamente en el costo/distancia (un 80%).

## Alcance del documento.

A continuación se analizaran distintos métodos de solución para los problemas MDVRP, MDVRPTW, PMDVRP así como MOM-MDVRP y combinaciones de los mismos. A lo largo de la presentación de soluciones también se encontraran los problemas clásicos como TSP y VRP a modo de ejemplos de métodos de solución. La solución de estos dos tipos de problemas son la base para la solución de problemas más complejos de MDVRP y sus variantes. Por Otro lado es importante resaltar que nos concentraremos en las restricciones clásicas de los problemas de ruteo plateadas por Laporte et al 1996 [22]

1. Cada ruta comienza y termina en el mismo depósito.
2. Cada cliente es atendido exactamente una vez.
3. La demanda total de cada ruta no excede la capacidad del vehículo.
4. El costo total de la distribución es minimizado.

Cuando Dantzing y Ramser presentan The Truck Dispatching Problem en [7], muestran la dificultad que implicaría encontrar soluciones óptimas para TSP por lo cual proponen un algoritmo para encontrar soluciones cercanas a la solución óptima en el problema planteado (The Truck Dispatching Problem como una generalización de TSP).

## Métodos para la resolución de problemas de ruteo de vehículos

Cómo ya se mencionó, se ha demostrado que los problemas de ruteo de vehículos aquí descritos son problemas NP-Duros. Y por lo tanto, el enfoque más habitual para solucionar estos problemas es a través de heurísticas y meta-heurísticas ya que para números grandes de clientes el costo computacional de los métodos exactos es demasiado elevado. (\*\*\*\*)

A continuación se hace mención a los métodos desarrollados para encontrar la solución óptima (métodos exactos) en los problemas de ruteos de vehículos para luego pasar a revisar los métodos heurísticos.

### Métodos Exactos

G. Dantzig, R. Fulkerson, y S. Johonson [9] en el año 1954 abordan el problema de encontrar una solución óptima para TSP (Traveling Salesman Problem). Muestran que la cantidad de posibilidades para encontrar la solución óptima es finita. Para n ciudades las posibilidades son . En este estudio se delinea una manera de aproximarse al problema que, al menos, algunas veces permite encontrar el camino óptimo y además probar que el camino encontrado es el óptimo. Se concluye que el método mostrado es factible para encontrar soluciones óptimas, pero únicamente para un número moderado de ciudades. El problema plantado como ejemplo en dicho estudio consta de 49 ciudades.

En [17] R.V. Kulkarni plantea a los problemas de ruteo de vehículos como problemas de Programación Entera Lineal, se concluye que los métodos de solución de estos, aún no han sido suficientemente desarrollados como para abarcarlos en tiempos razonables de cómputo para cantidades grandes de clientes (o ciudades).

En el libro “Survey Combinatorial Optimization” [22], G. Laporte presenta un capítulo sobre algoritmos exactos para el problema de ruteo de vehículos. En el mismo realizan un sondeo sobre los algoritmos exactos existentes hasta el momento y nos muestran que al parecer todos caen en una de las siguientes categorías de tipos de algoritmo:

1. Búsqueda arborescente
2. Programación dinámica (DP)
3. Programación entera linean (ILP)

La última categoría es muy extensa y cuenta con el mayor esfuerzo de investigación en los últimos años. Se subdivide en tres subcategorías:

1. Formulación de particionamiento del conjunto
2. Formulación de flujo de vehículos
3. Formulación del flujo de mercancía

Entrar en detalle en cada uno de los métodos de solución exacta se aleja del propósito de este estado del arte. Por lo cual se limita únicamente a mencionar la existencia sobre el trabajo realizado al respecto. Haciendo énfasis que para grandes cantidades de clientes (o ciudades, puntos, etc.), los métodos exactos requieren demasiado procesamiento de cómputo, por lo cual el enfoque utilizado para encarar este tipo de problemas (sobre todo con grandes cantidades de clientes) es heurístico. Dicho enfoque aplica para todas las variantes de ruteo de vehículos. Tanto para TSP, VRP, MDVRP, y cualquiera de sus variantes dado que la complejidad de los problemas no parece disminuir en ningún caso.

### Métodos Heurísticos

A continuación se presenta una breve referencia a lo que se entiende por heurística y meta-heurística.

En [20] dice que las heurísticas (para soluciones de VRP) son procedimientos simples que realizan una exploración limitada del espacio de búsqueda y dan soluciones de calidad aceptable en tiempos de cálculo generalmente moderados. A su vez, se presentan a las meta heurísticas como procedimientos genéricos de exploración del espacio de soluciones para problemas de optimización y búsqueda.

En general las meta heurísticas obtienen mejores resultados que las heurísticas clásicas, pero incurriendo en mayores tiempos de ejecución.

En [23] los autores F. Glover y G. A. Kochenberg, introducen al lector en el libro indicando que:

*“Las Meta heurísticas son métodos de solución que orquestan una interacción entre procedimientos de mejora local y estrategias a un nivel superior para crear procesos capaces de escapar de óptimos locales y de esta forma realizar una búsqueda más robusta del espacio de soluciones.”*

#### Heurísticas para VRP

Si bien el objetivo de este “estado del arte” es el problema MDVRP (Multi Depot Vehicle Routing Problem), sería imposible abarcar el problema del mismo sin antes hacer un sondeo de los métodos de solución para problemas con un único depósito (VRP). Por lo cual, a continuación, sin entrar en demasiado detalle, se presentan las heurísticas que se han desarrollado para VRP. La cantidad de heurísticas existentes para este problema es bastante extensa, por lo cual nos vamos a centrar en las clásicas.

##### Algoritmo de Ahorros de Clarke and Wright

A continuación se muestra la idea general de dicho algoritmo basándose en los apuntes de J. Lysgaard [24] el cuál proporciona además un ejemplo sobre el mismo. La idea es la siguiente:

El concepto básico del “ahorro” expresa el costo ahorrado obtenido por juntar dos rutas en una misma ruta como se ilustra en la imagen a continuación:



Figura 1.4

Inicialmente los consumidores y son visitados en rutas separadas (a). Una alternativa a esto es visitar a los dos clientes en la misma ruta, por ejemplo como lo ilustrado en (b). El ahorro por hacer esto puede ser calculado. Denotando el costo de transporte entre y con , el costo total de transporte , en la figura 1.4 (a), es:

De la misma forma, el costo de transporte en la figura 1.4 (b) es:

Al combinar las dos rutas, se obtiene el siguiente ahorro :

Los mayores valores indicarán que la unión de esas rutas es más atractiva en comparación con otras de menor ahorro. También se deberán verificar las restricciones del problema como la capacidad del vehículo.

Con esta idea básica sobre el ahorro al unir rutas es que se forma el algoritmo.

Existen distintas variantes y extensiones a la versión básica del algoritmo de ahorros. Como por ejemplo, se puede distinguir entre la versión secuencia y la versión paralela. Además se encuentra la versión del algoritmo basada en matching. Por las mismas y otras extensiones del algoritmo se sugiere consultar [20]

##### Heurísticas de Inserción

Como se indica en [20], las heurísticas de inserción son métodos constructivos en los cuales se crea una solución mediante sucesivas inserciones de clientes en las rutas. En cada iteración se tiene una solución parcial cuyas rutas sólo visitan un subconjunto de los clientes y se selecciona un cliente no visitado para insertar en dicha solución.

Existen varias heurísticas del tipo de Inserción. A continuación se muestra a modo de ejemplo la idea general de la heurística de Inserción Secuencial de Mole & Jameson [25]

El algoritmo puede ser pensado en términos de repetir una secuencia de tres pasos.

En el primer paso se determina el lugar más ventajoso en la ruta emergente para cada cliente que aún no está asignado. Se utiliza el criterio del costo que se agrega al insertar al cliente entre dos clientes ya pertenecientes a la ruta. Cuando el costo es el mínimo se determina que esa es la posición más ventajosa. Se entiende como ruta emergente a la ruta que se está construyendo en esta etapa del algoritmo.

En el segundo paso se identifica al siguiente cliente no asignado el cuál se va a asignar a la ruta emergente. Aquí se podría utilizar el que implica un costo mínimo también, pero además, generando incentivos adicionales para los clientes que se encuentran más dispersos. De esta forma se evita dejar para el final los clientes lejanos al depósito lo cual podría resultar en rutas ineficientes.

En el tercer paso se explora si alguna reasignación del orden de los clientes en la ruta es más eficiente. Luego se verá algo de optimización en este estado del arte.\*\*\*\*\*

##### Heurísticas de dos fases

En [20] se pueden encontrar las siguientes familias de estrategias para heurísticas para VRP. Asignar Primero – Rutear Después por un lado y Rutear Primero – Asignar Después por otro. El termina “Asignar” refiere al hecho de asignar un cliente a una ruta. Y “Rutear” como el nombre lo indica es establecer la ruta.

Como se indica en [20], en el caso Asignar Primero – Rutear Después se busca generar grupos de clientes, también llamados clusters, que estarán en una misma ruta en la solución final. Luego, para cada cluster se crea una ruta que visite todos los clientes. Las restricciones de capacidad son consideradas en la primera etapa, asegurando que la demanda total de cada cluster no supera la capacidad del vehículo. Por lo tanto, construir las rutas para cada cluster es un TSP. Un ejemplo de esta estrategia es la heurística de Barrido o Sweep, en la cual los clusters se forman girando una semirrecta con origen en el depósito e incorporando los clientes “barridos” por dicha semirrecta hasta que se viole la restricción de capacidad. Luego cada cluster es ruteado resolviendo un TSP.

En este caso solo se tienen en cuenta restricciones de capacidad de los vehículos. Sería distinto el algoritmo con más restricciones, como por ejemplo con la restricción de que el largo total de una ruta no puede ser mayor a un valor predeterminado.

En las heurísticas de Rutear Primero-Asignar Después, lo primero que se hace, como lo dice el nombre de la estrategia, es calcular una ruta que visite a todos los clientes. Para hacer esto basta con resolver un problema TSP. En general esta ruta no va a respetar las restricciones del problema y se debe partir en varias rutas, cada una de las cuales, respetaría las restricciones [20].

#### Heurìsticas para MDVRP

\*\*\*\*\* fran \*\*\*\*\*\*\*\*

#### Meta - Heurísticas para VRP

Siguiendo con la referencia de [20], se presenta a continuación meta heurísticas para la resolución de problemas VRP. Algoritmos de hormigas, Búsquedas Tabú y Algoritmos Genéticos son meta heurísticas representantes de tres paradigmas diferentes. Los Algoritmos de Hormigas son procedimientos basados en agentes que utilizan métodos constructivos aleatorizados y cooperan entre si compartiendo información. Los algoritmos de búsqueda Tabú son métodos de búsqueda local que aceptan empeorar las soluciones para escapar de los óptimos locales. Los Algoritmos Genéticos se basan en mantener un conjunto de soluciones lo suficientemente diverso como para cubrir gran parte del espacio de soluciones.

…. Poner referencias a uno o dos paper de meta-heuristicas para vrp… hy un montòn

javier

#### Meta – Heurìsticas para MDVRP

A continuación se muestran algunas meta-heurísticas desarrolladas para resolver problemas de ruteos de vehículos con varios depósitos.

**PSO**

Lei Wen y Fanhua Meng, publicaron en el 2008 el artículo “An Improved PSO for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows”. [12]

En el mismo explican el algoritmo PSO utilizado. Particle Swarm Optimization . En castellano, Optimización por Enjambre de Partículas es un algoritmo de optimización basado en la teoría de partículas. La idea principal de PSO es modelar el vuelo de un enjambre de pájaros (partículas) alrededor de una cumbre. El estado de una partícula en el espacio de búsqueda está definido por dos factores: posición y velocidad. La posición y velocidad de la partícula i en un espacio de búsqueda de d-dimensiones puede ser representado como Xi=(xi1,xi2,xi3….,xiD) y Vi=(vi1,vi2….viD) respectivamente. Cada partícula conoce su mejor posición Pi=(pi1,pi2…,piD) que obtuvo en su camino recorrido. Y también conoce la mejor posición global, denotado como Pg=(pg1,pg2…pgD) que es la mejor posición que obtuvo alguna partícula del enjambre. En cada iteración se calcula una nueva velocidad para cada partícula. 

En donde c1 y c2 son constantes llamadas coeficientes de aceleración, w es llamada peso del factor de inercia, r1 y r2 son dos números aleatorios distribuidos uniformemente en el rango [0,1]. Por lo tanto, la posición de cada partícula es actualizada en cada iteración de acuerda a la siguiente ecuación:



En el caso de utilizar la meta-heurística PSO en el problema MDVRPTW, las posiciones de las partículas son las soluciones candidatas para el ruteo. En cada posición se calcula el costo total para poder compararlas y de esta forma saber cuál es la mejor posición conocida de cada partícula y la mejor posición global.

El primer paso en la solución planteada es encontrar una solución factible inicial. Para esto se asignan los clientes al depósito más cercano. Luego para cada depósito se busca una solución para el ruteo utilizando al algoritmo de ahorros de Clarke and Wright [poner referencia]. Luego se establece la posición inicial para un conjunto de partículas variando aleatoriamente la solución factible recién encontrada. Para esto se cambian aleatoriamente algunos clientes de depósito y se asignan a nuevas rutas. Luego de esta etapa inicial comienza una etapa iterativa en donde las partículas van buscando el óptimo en el espacio de soluciones.

Para esto es necesario codificar las soluciones de ruteo en posiciones de partículas en un espacio multidimensional. También es necesario tener en cuentas que el algoritmo PSO aplica en espacios continuos, cuando las soluciones de ruteo están un espacio discreto. No se entra en detalle en este documento de cómo se codifican las partículas y de cómo se calcula la actualización de la posición de la partícula en cada iteración.

El objetivo es mostrar cómo es que la meta-heurística PSO explora el espacio de soluciones.

En este caso en particular de MDVRPTW(An Improved PSO for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows [12]) se toman las ventanas de tiempo del tipo soft. O sea que en la solución se puede llegar “tarde” o “temprano” en la visita a un cliente, pero eso afectará en el costo de la ruta.

Se utiliza la siguiente notación:

es un grafo dirigido en donde es el conjunto de vértices y el conjunto de aristas. incluye a dos subconjuntos: , es el conjunto que representa a los clientes y es el conjunto que representa a los depósitos. Cada vértice de contiene la información de la demanda del cliente (g) y cada vértice en contiene la cantidad de vehículos que tiene el depósito(K). es el costo de transporte entre los vértices (,).

Cada cliente tiene una ventana de tiempo asociada [E,L] en donde E es el (earliest) tiempo límite más temprano de servicio, y L (latest) es el tiempo límite más tarde de servicio. representa el tiempo de arribo al cliente .

La función que calcula la penalización cuando a un cliente se lo visita fuera de tiempo es de la forma: =.(E,-,0)+(-,L,0) donde y son coeficientes de penalización.

**Tabu Serch**

En [26] “A TABU SEARCH HEURISTIC FOR THE ,MULTI-DEPOT VEHICLE ROUTING PROBLEM, la estrategia que utiliza la meta-heurística Tabú Search también comienza a partir de una solución inicial. Para esto se asignan los clientes al depósito más cercano y luego se rutean los vehículos utilizando una heurística para VRP.

Luego que se tiene la solución inicial, Tabú Search se basa en un algoritmo llamado FIND. El mismo consiste en tres fases: Fast Improvement, INtensification, y Diversification.

Cada una de estas fases se basa en alguno, o todos, de los siguientes procedimientos básicos:

1-route: Se utiliza para post-optimizar una ruta simple de vehículos. Se basa en aplicar el algoritmo 4-opt (poner referencia al mismo, o explicarlo)

2-route: Se utiliza para buscar mejoras en la solución moviendo vértices provenientes de dos rutas distintas. Podrían ser rutas asignadas a depósitos distintos.

3-route: Similar a 2-route pero se intercambian vértices provenientes de 3 rutas.

Al aplicar FIND, la mejor solución encontrada y su valor es recordado, pero como se permite deteriorar la función objetivo, la solución tenida en cuenta en el algoritmo en cada iteración no es necesariamente la mejor solución. Cuando un vértice es movido de su ruta actual, moverlo nuevamente a su ruta original es declarado un movimiento tabú por un número aleatorio de iteraciones.

A continuación se explican las tres fases de FIND:

Fast Improvement: En esta fase, el algoritmo intenta mejorar aplicando repetidamente los siguientes pasos:

* Inter-depot: aplicar intercambios 2-route entre rutas de dos diferentes depósitos.
* Intra-depot: aplicar intercambios 2-route entre rutas del mismo depósito.
* 3-route: intercambiar vértices entre tres rutas.

La secuencia es repetida hasta que no hay mejoras por iteraciones consecutivas. En cada uno de estos tres pasos, cualquier movida que encuentra una mejora, es implementada inmediatamente como la solución actual a tomar en cuenta. En otro caso, la mejor solución no-tabú que deteriora la función objetivo, es implementada. Cuando se implementa un movimiento de vértices entre rutas, se aplica 1-route a todas las rutas involucradas en el movimiento.

Intensification:

Esta fase intensifica la búsqueda de rutas mejores, comenzando con la mejor solución conocida y trabajando con un único depósito a la vez. Aplica iteraciones de intra-depot a las rutas de cada depósito.

Diversification: Esta fase aplica una combinación Inter-depot e Intra-depot, moviendo vértices entre distintos depósitos, con el objetivo de realizar una exploración más extensa del espacio de soluciones.

\*\*\*\*\*\*Javier \*\*\*\*\*\*\*\*\*

EL TEMA DE BÚSQUEDA LOCAL CREO QUE ES UN TEMA NO SOLO PARA VRP SINO QUE PARA MDVRP O LO QUE SEA… VER DE PONERLO MÁS ADELANTE EN VEZ DE PONERLO ACÁ…

ENTRAR DE LLENO EN MDVRP QUE ES LO CENTRAL DEL PROYECTO

PEQUEÑA INTRODUCCIÓN CON DIBUJOS(BIEN CHOTA)

VARIANTES ESPECÍFICAS DE MULTI DEPOT. (REFERENCIAR LAS VARIANTES ANTERIORES)

METODOS META-HEURÌSTICO… HIBRIDOS

# Soluciones de software existentes para MDVRP

ale

# Bibliografía

|  |  |
| --- | --- |
| [1] | I. Gallegos Mateos, A. Gómez Gómez y D. Arguelles Martino, «A hybrid method for the resolution of the MDVRP,» pp. 45-64, 2013. |
| [2] | A. Schrijver, «On the History of Combinatorial Optimization,» 1960. |
| [3] | L. Bodin, «Routing and scheduling of vehicles and crew: The State of the Art,» *Comput. & Ops Res.,* vol. 10, nº 2, pp. 63-211, 1983. |
| [4] | Y. Wang, «Research of Multi-Depot Vehicle Routing Problem by Cellular Ant Algorithm,» *Journal of Computers,* vol. 8, nº 7, pp. 1722-1727, 2013. |
| [5] | Surekha y S. Sumathi, «Solution to Multi-Depot Vehicle Routing Problem Using Genetic Algorithms,» *World Applied Programming,* vol. 1, nº 3, pp. 118-131, 2011. |
| [6] | J. Carlsson, D. Ge, A. Subramaniam, A. Wu y Y. Ye, «Solvin Min-Max Multi-Depot Vehicle Routing Problem,» 2006. |
| [7] | G. B. Dantzig y J. H. Ramser, «The Truck Dispatching Problem,» *Management Science,* vol. 6, nº 1, pp. 80-91, 1959. |
| [8] | B. L. Golden, «Vehicle Routing Problems: Formulations and Heuristic Solution Techniques,» *Technical Reports,* nº 113, 1975. |
| [9] | G. Dantzig, D. Fulkerson y S. Johnson, «Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem,» *Journal of the Operations Research Society of America,* vol. 2, nº 4, pp. 393-410, 1954. |
| [10] | R. M. Karp, «Reducibility Among Combinatorial Problemas,» 1971. |
| [11] | S. N. Kumar y R. Panneerselvam, «A Survey on the Vehicle Routing Problem and Its Variants,» *Intelligent Information Management,* nº 4, pp. 66-74, 2012. |
| [12] | L. Wen y F. Meng, «An Improved PSO for the Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Time Windows». |
| [13] | R. Baldacci, M. Battarra y D. Vigo, «Routing a Heterogeneous Fleet of Vehicles,» *Technical Report DEIS OR.INGCE 2007/1,* 2007. |
| [14] | C. Tan y J. Beasley, «A Heuristic Algorithm for the Period Vehicle Routing Problem,» *OMEGA Int. J. of Mgmt Sci.,* vol. 12, nº 5, pp. 497-504, 1984. |
| [15] | P. Francis y K. Smilowitz, «The Period Vehicle Routing Problem with Service Choice,» *Teansportation Science,* vol. 40, nº 4, pp. 439-454, 2006. |
| [16] | A. Mingozzi y A. Valleta, «An exact algorithm for period an multi-depot vehicle routing problems». |
| [17] | R. V. Kulkarni y P. R. Bhave, «Integer programming formulations of vehicle Routing Problems,» *Eurorean Journal of Operational Research,* vol. 20, pp. 58-67, 1985. |
| [18] | A. Garcia-Najera y J. A. Bullinaria, «Bi-objective Optimization for the Vehicle Routing Problem with Time Windows,» School of Computer Science, University of Birmingham. |
| [19] | R. Bowerman, B. Hall y P. Calamai, «A Multiobjetive Optimization Approach to Urban School Bus Routing: Formulation and Solution Method,» 1995. |
| [20] | A. Olivera, «Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos,» Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay., 2004. |
| [21] | J. R. Montoya-Torres, J. López Franco, S. Nieto Isaza, H. Felizzola Jiménez y N. Herazo-Padilla, «A literature review on the vehicle routing problem with multiple depots,» *Computers & Industrial Engineering,* vol. 79, pp. 115-129, 2015. |
| [22] | G. Laporte y Y. Nobert, Survey Combinatorial Optimization. |
| [23] | F. Glover y G. A. Kochenberger, Handbook of Metaheuritics, Kluwer Academic Publishers, 2003. |
| [24] | J. Lysgaard, «Clarke & Wright's Savings Algorithm». |
| [25] | Mole y Jameson, «A Sequential Route-Building Algorithm Employing a Generalised Savings Criterion». |
| [26] | P. Toth y D. Vigo, The Vehicule Routing Problem. |
| [27] | G. González Vargas y F. González Aristizabal, «Metaheurísticas aplicadas al ruteo de vehículos. Un caso de estudio. Parte 1: formulación del problema,» *Revista Ingeniería e Investigación,* vol. 26, nº 3, pp. 149-156, 2006. |
| [28] | K. Jansen, «Bounds for the general capacitated routing problem.,» vol. 23, pp. 165-173, 1993. |
| [29] | P. Toth y A. Tramontani, «An Integer Linear Programming Local Search for Capacitated Vehicle Routing Problems,» *The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges,* vol. 2, pp. 275-295, 2008. |
| [30] | T.-H. Wu, C. Low y J.-W. Bai, «Heuristic solutions to multi-depot location-routing problems,» *Computers & Operations Research 29,* pp. 1393-1415, 2002. |
| [31] | B. Crevier, J.-F. Cordeau y G. Laporte, «The multi-depot vehicle routing problem with inter-depot routes,» *European Journal of Operational Research 176,* pp. 756-773, 2007. |
| [32] | W. Ho, G. T. Ho, P. Ji y H. C. Lau, «A hybrid genetic algorithm for the multi-depot vehicle routing problem,» *Engineering Applications of Artificial Intelligence 21,* pp. 548-557, 2008. |
| [33] | T. Vidal, T. G. Crainic, M. Gendreau y C. Prins, «Heuristics for Multi-Attribute Vehicle Routing Problems: A Survey and Synthesis,» *CIRRELT,* 2012. |
| [34] | C. Prins, «A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem,» *Computers & Operations Research,* vol. 31, pp. 1985-2002, 2004. |
| [35] | J. Renaudl, G. Laporte y F. F. Boctor, «A tabu search heuristics for the multi-depot vehicle routing problem,» *Computers & Operations Research,* vol. 23, nº 3, pp. 229-235, 1996. |
| [36] | A. Olivera, «Memorias adaptativas para el problema de ruteo de vehículos con múltiples viajes,» Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay., 2005. |